COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Septiembre. Modelo B

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios 5 y 6 en otra hoja de examen, en el espacio que necesite.

Se permite el uso de calculadora no programable, si la calculadora no tiene más de dos líneas de salida.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Consideramos en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$, $C[-\pi, \pi]$, y el producto escalar, para $f, g \in C[-\pi, \pi]$,

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Con esta norma, ¿son ortogonales las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 1$?

Solución:

2. Sea C la hélice dada por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -t).$$

Se pide determinar la curvatura en un punto genérico $\mathbf{x}(t)$.

Solución:

3. (1 PUNTO) Sea C una curva dada por la ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(t) = ((t+1)^2, e^{\operatorname{sen} t}, t^2 - 2t).$$

Determine si C tiene puntos múltiples y si es regular.

Solución:

Solución (continuación):

4. (1 PUNTO) Los coeficientes de las formas fundamentales de una superficie S en un punto P son $E = 1, F = -1, G = -1; e = 1, f = 0, g = 0$. ¿Cuál es la curvatura normal en la dirección $(1, 1)$?

Solución:

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Cada uno de los apartados vale 1 punto.

   a) Defina envolvente de una familia de curvas planas.

   b) Consideramos la familia de rectas

   $$\left\{ y = \lambda x + \frac{1}{\lambda} : \lambda > 0 \right\}.$$

   Determine la ecuación $\mathbf{e}(\lambda)$ de su envolvente.

   c) Determine la curvatura de la envolvente en $\mathbf{e}(1)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

6. (3 PUNTOS) Para $u, v \in [0, 2\pi)$, sea T el toro de ecuaciones:

$$x = (2 + \operatorname{sen} u) \cos v,$$
$$y = (2 + \operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v,$$
$$z = \cos u.$$

   a) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.

   b) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental. Clasifique sus puntos.

   c) Determine la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas principales de la superficie en el punto $(1, 0, 1)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x,y) = \frac{(-f_y, f_x)\,H(f)\,(-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \\ \tau(t) &= -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}. \end{aligned}$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$\begin{aligned} &E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \\ &e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}. \end{aligned}$$

Curvaturas:

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ H &= \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2\left(EG - F^2\right) - (Eg - 2Ff + Ge)\,k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)\,dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e\,(du)^2 + 2f dudv + g\,(dv)^2 = 0.$$